ESTADÍSTICA

Examen Final 10 de Junio de 2013

Lee esto antes de empezar

- La duración del examen es de 2h. 30min.
- No se puede salir del aula y volver a entrar, debiendo permanecer en ella durante la primera media hora.
- No se puede utilizar ni lápiz ni bolígrafo rojo.

P1

En una urna U_1 tenemos 5 bolas negras y 3 blancas. En otra urna U_2 tenemos 6 bolas negras y 2 blancas. Lanzamos al aire, una moneda trucada, en la que la probabilidad de cara es el triple que la de cruz. Si el resultado del lanzamiento es cara, extraemos dos bolas simultáneamente de la urna U_1. En caso contrario realizamos la extracción de la urna U_2.

a) Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras.

b) Si sabemos que se han obtenido dos bolas negras, halla la probabilidad de que la extracción haya sido de la urna U_2.

Solución: Sea $P(\text{"}cara\text{"}) = P(C)$ $\quad P(\text{"}cruz\text{"}) = P(+)$. Se tiene $P(C) = 3P(+)$ y $P(C)+P(+)=1$ así que $P(C)=\frac{3}{4}$ y $P(+)=\frac{1}{4}$

a) Sea $E = \text{"}sacar\ dos\ bolas\ negras\text{"}$

$$P(E) = P\left((E\cap U_1)\cup(E\cap U_2)\right) = P(E\cap U_1) + P(E\cap U_2) = P(U_1)P\left(E/U_1\right) + P(U_2)P\left(E/U_2\right)$$

$$P(U_1) = P(C) = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad P(U_2) = P(+) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(E/U_1\right) = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5}{14} \quad \text{y} \quad P\left(E/U_2\right) = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

Queda $P(E) = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{14} + \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{28} = \frac{45}{112} = 0{'}401$

b) $$P\left(U_2/E\right) = \frac{P(U_2\cap E)}{P(E)} = \frac{P(U_2)P\left(E/U_2\right)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{28}}{\frac{45}{112}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

(2 puntos)

P2

Sea X v.a. continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases} k\cos x & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & resto \end{cases}$$

Calcula:

a) El valor de k para que f sea densidad.
b) La función de distribución asociada a X
c) $P\left\{X<\dfrac{\pi}{3}\Big/ X\geq -\dfrac{\pi}{4}\right\}$

Solución:

a) $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} k\cos x dx = k sen x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=k\left(sen\frac{\pi}{2}-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2k\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos x & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & resto \end{cases}$ $\qquad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Si $x<-\dfrac{\pi}{2}$: $\quad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0=0$

Si $-\dfrac{\pi}{2}\leq x<\dfrac{\pi}{2}$: $\quad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0+\int_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cos t dt=\frac{1}{2}sen t\Big|_{-\pi/2}^{x}=\frac{1}{2}\left(sen x-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{sen x+1}{2}$

Si $\dfrac{\pi}{2}\leq x$: $\quad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos t dt+\int_{\pi/2}^{x}0=\frac{1}{2}sen t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1$

Resumiendo:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{sen x+1}{2} & si\ -\dfrac{\pi}{2}\leq x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & si\ \dfrac{\pi}{2}\leq x \end{cases}$$

c) $P\left(X<\dfrac{\pi}{3}\Big/ X\geq-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{P\left(X<\frac{\pi}{3}\wedge X\geq-\frac{\pi}{4}\right)}{P\left(X\geq-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{P\left(-\frac{\pi}{4}\leq X<\frac{\pi}{3}\right)}{1-P\left(X<-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1-F\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=$

$$=\frac{\dfrac{1+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}-\dfrac{1+sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}{1-\dfrac{1+sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\frac{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}{1-\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}}=0'92$$

(2.5 puntos)

P3

En una población la cantidad de plomo *X* presente en sangre de una persona, sigue una distribución Normal de media 30 y varianza 100. Una cantidad superior a 45 se considera extremadamente alta.

a) Determina el porcentaje de individuos de la población con una cantidad de plomo extremadamente alta.

b) Si tenemos veinte personas escogidas al azar, calcula la probabilidad de que al menos dos de ellas tengan una cantidad de plomo extremadamente alta.

Solución:

a) $X \equiv N(30,10)$

$$P(X > 45) = P\left(\frac{X-30}{10} > \frac{45-30}{10}\right) = P\left(N(0,1) > 1'5\right) = 1 - P\left(N(0,1) \le 1'5\right) = 1 - 0'93319 =$$
$$= 0'06681 \to 6'68\%$$

b) Sea $Y \equiv numero\ de\ personas\ entre\ las\ 20\ con\ cantidad\ de\ plomo\ extremadamente\ alta$

Como $P(\text{"}cantidad\ de\ plomo\ extremadamente\ alta\text{"}) = 0'066 \approx 0'07$ se tiene que $Y \equiv B(20, 0'07)$

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - \left(P(Y=0) + P(Y=1)\right) = 1 - \left(0'93^{20} + 20 \cdot 0'07 \cdot 0'93^{19}\right) =$$
$$= 1 - (0'234 + 0'352) = 0'414$$

(2.5 puntos)

P4

Para averiguar si un medicamento es eficaz contra el melanoma, se lleva a cabo un estudio con ratones de laboratorio que tiene dicha enfermedad. Once ratones reciben el tratamiento y trece no lo reciben. El tiempo que sobreviven los ratones desde que se inició el experimento, suponemos que sigue una distribución Normal.

En la muestra de ratones con el tratamiento se obtuvo un tiempo medio de supervivencia de 74 meses y una desviación típica de 15 meses. Por su parte, en la muestra de ratones sin tratamiento el tiempo medio fue de 78 meses y una desviación típica de 13 meses.

a) Construye un intervalo de confianza del 90% para el cociente varianzas poblacionales.

b) Calcula un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias poblacionales. ¿Qué se puede decir sobre la eficacia del medicamento?

Solución: $X \equiv tiempo\ que\ sobreviven\ los\ ratones\ con\ tratamiento$ $\quad X \equiv N(\mu_1, \sigma_1)$

$m.a.s. \quad n = 11 \quad \overline{x} = 74 \quad s_1 = 15$

$Y \equiv tiempo\ que\ sobreviven\ los\ ratones\ \text{sin}\ tratamiento$ $\quad X \equiv N(\mu_2, \sigma_2)$

$m.a.s. \quad m = 13 \quad \overline{y} = 78 \quad s_2 = 13$

a) Intervalo de confianza del 90% para $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$I.C._{0'9} = \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{n-1,m-1,0'05}}, \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{m-1,n-1,0'05}\right)$$

$n = 11 \qquad m = 13 \qquad P\left(F_{12,10} > 2'91\right) = 0'05 \Rightarrow f_{12,10,0'05} = 2'91$

$P\left(F_{10,12} > 2'75\right) = 0'05 \Rightarrow f_{10,12,0'05} = 2'75$ y queda:

$$I.C._{0'9} = \left(\left(\frac{15}{13}\right)^2 \frac{1}{2'75}, \left(\frac{15}{13}\right)^2 \cdot 2'91 \right) = (0'484, 3'874)$$

Como $1 \in I.C. \Rightarrow$ No podemos afirmar que $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ sea $\neq 1 \Leftrightarrow$ No podemos afirmar que las varianzas poblacionales sean distintas y, por tanto, <u>admitimos varianzas poblacionales iguales.</u>

b) Intervalo de confianza del 95% para $\mu_1 - \mu_2$:

$$I.C._{0'95} = \left(\overline{x} - \overline{y} - s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} t_{0'025}, \ \overline{x} - \overline{y} + s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} t_{0'025} \right)$$

(X e Y normales con $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocidas)

$n = 11, \ m = 13 \Rightarrow n + m - 2 = 22$

$P(t_{22} > 2'074) = 0'025 \Rightarrow t_{0'025} = 2'074$

$s_p^2 = \dfrac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} = \dfrac{10 \cdot 15^2 + 12 \cdot 13^2}{22} = 194'45$ y queda:

$$I.C._{0'95} = \left(74 - 78 - \sqrt{194'45}\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{13}} 2'074, \ 74 - 78 + \sqrt{194'45}\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{13}} 2'074 \right) = (-15'85, 7'85)$$

Como $0 \in I.C. \Rightarrow$ No podemos afirmar que $\mu_1 - \mu_2$ sea $\neq 0 \Leftrightarrow$ No podemos afirmar que $\mu_1 \neq \mu_2$

Los datos no nos permiten afirmar que el medicamento es eficaz, con una seguridad del 95%

(3 puntos)